



SLOŽENOST ALGORITAMA | ODABRANE METODE OPTIMIZACIJE

ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE

Branko Malešević i Ivana Jovović



Glava 1

1	Složenost algoritama	5
1.1	Turing-ova mašina	



1. Složenost algoritama

1.1 Turing-ova mašina

Zadatak 1.1 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se ispisuje prvi komplement datog broja (broj dobijen invertovanjem svakog bita datog broja).

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_+, b, -1)$
 $f(q_1, 0) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, 0, +1)$

□

Zadatak 1.2 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je broj zadat kao niz jedinica između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije trake Turing-ove mašine je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom 1. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se zadati broj pomera za jednu ćeliju ulevo.

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, -1)$
 $f(q_1, b) = (q_2, 1, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_-, 1, +1)$

$$\begin{aligned} f(q_2, b) &= (q_3, b, -1) \\ f(q_2, 1) &= (q_2, 1, +1) \\ f(q_3, b) &= (q_-, b, +1) \\ f(q_3, 1) &= (q_+, b, -1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.3 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se zadati broj pomera za jednu ćeliju ulevo.

Rešenje.

$$\begin{aligned} f(q_0, b) &= (q_-, b, +1) \\ f(q_0, 0) &= (q_1, b, -1) \\ f(q_0, 1) &= (q_2, b, -1) \\ f(q_1, b) &= (q_3, 0, +1) \\ f(q_1, 0) &= (q_3, 0, +1) \\ f(q_1, 1) &= (q_3, 0, +1) \\ f(q_2, b) &= (q_3, 1, +1) \\ f(q_2, 0) &= (q_3, 1, +1) \\ f(q_2, 1) &= (q_3, 1, +1) \\ f(q_3, b) &= (q_4, b, +1) \\ f(q_3, 0) &= (q_4, b, +1) \\ f(q_3, 1) &= (q_4, b, +1) \\ f(q_4, b) &= (q_+, b, +1) \\ f(q_4, 0) &= (q_1, b, -1) \\ f(q_4, 1) &= (q_2, b, -1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.4 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se zadatom broja dodaje broj 1 u binarnom sistemu.

Rešenje.

$$\begin{aligned} f(q_0, b) &= (q_-, b, +1) \\ f(q_0, 0) &= (q_1, 0, +1) \\ f(q_0, 1) &= (q_1, 1, +1) \\ f(q_1, b) &= (q_2, b, -1) \\ f(q_1, 0) &= (q_1, 0, +1) \\ f(q_1, 1) &= (q_1, 1, +1) \\ f(q_2, b) &= (q_+, 1, +1) \\ f(q_2, 0) &= (q_+, 1, +1) \\ f(q_2, 1) &= (q_2, 0, -1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.5 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se od zadatog broja oduzima broj 1 u binarnom sistemu. Ukoliko je zadati broj nula, kao rezultat ispisuje se znak 0.

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_2, b, -1)$
 $f(q_1, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_2, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_2, 0) = (q_3, 1, -1)$
 $f(q_2, 1) = (q_+, 0, +1)$
 $f(q_3, b) = (q_4, b, +1)$
 $f(q_3, 0) = (q_3, 1, -1)$
 $f(q_3, 1) = (q_+, 0, +1)$
 $f(q_4, b) = (q_+, 0, +1)$
 $f(q_4, 0) = (q_-, 0, +1)$
 $f(q_4, 1) = (q_4, b, +1)$

□

Zadatak 1.6 Turing-ova mašina radi sa azbukom $S = \{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije trake je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se utvrđuje da li je zadati broj deljiv sa 4.

Rešenje. Broj je deljiv sa 4 ako i samo ako su poslednje dve cifre u njegovom binarnom zapisu nula. Program Turing-ove mašine $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_-, q_+\}$, dat je nizom instrukcija:

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_2, b, -1)$
 $f(q_1, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_2, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_2, 0) = (q_3, 0, -1)$
 $f(q_2, 1) = (q_-, 1, +1)$
 $f(q_3, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_3, 0) = (q_+, 0, +1)$
 $f(q_3, 1) = (q_-, 1, +1)$

□

Zadatak 1.7 Turing-ova mašina radi sa azbukom $S = \{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije trake je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se utvrđuje da li je zadati broj deljiv sa 8.

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_2, b, -1)$
 $f(q_1, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_2, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_2, 0) = (q_3, 0, -1)$
 $f(q_2, 1) = (q_-, 1, +1)$
 $f(q_3, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_3, 0) = (q_4, 0, -1)$
 $f(q_3, 1) = (q_-, 1, +1)$
 $f(q_4, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_4, 0) = (q_+, 0, +1)$
 $f(q_4, 1) = (q_-, 1, +1)$

□

Zadatak 1.8 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka se na traci Turing-ove mašine prirodni broj predstavlja svojim binarnim zapisom, između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ kojim se utvrđuje da li je broj palindrom.

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_1, b, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_2, b, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_3, b, -1)$
 $f(q_1, 0) = (q_1, 0, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_2, b) = (q_4, b, -1)$
 $f(q_2, 0) = (q_2, 0, +1)$
 $f(q_2, 1) = (q_2, 1, +1)$
 $f(q_3, b) = (q_+, b, +1)$
 $f(q_3, 0) = (q_5, b, -1)$
 $f(q_3, 1) = (q_-, 1, +1)$
 $f(q_4, b) = (q_+, b, +1)$
 $f(q_4, 0) = (q_-, b, -1)$
 $f(q_4, 1) = (q_5, b, -1)$
 $f(q_5, b) = (q_6, b, +1)$
 $f(q_5, 0) = (q_5, 0, -1)$

$$\begin{aligned} f(q_5, 1) &= (q_5, 1, -1) \\ f(q_6, b) &= (q_+, b, +1) \\ f(q_6, 0) &= (q_1, b, +1) \\ f(q_6, 1) &= (q_2, b, +1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.9 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je broj $n \in \mathbb{N}_0$ zadat kao niz od $n + 1$ jedinica između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadanog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ koji računa nula funkciju $N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $N(n) = 0$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} f(q_0, b) &= (q_-, b, +1) \\ f(q_0, 1) &= (q_1, 1, +1) \\ f(q_1, b) &= (q_+, b, +1) \\ f(q_1, 1) &= (q_1, b, +1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.10 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je broj $n \in \mathbb{N}_0$ zadat kao niz od $n + 1$ jedinica između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadanog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ koji računa funkciju sledbenik $S : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $S(n) = n + 1$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} f(q_0, b) &= (q_-, b, +1) \\ f(q_0, 1) &= (q_1, 1, +1) \\ f(q_1, b) &= (q_+, 1, +1) \\ f(q_1, 1) &= (q_1, 1, +1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.11 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je broj $n \in \mathbb{N}_0$ zadat kao niz od $n + 1$ jedinica između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadanog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ koji računa funkciju prethodnika $P : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $P(n) = n \div 1$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} f(q_0, b) &= (q_-, b, +1) \\ f(q_1, b) &= (q_+, b, +1) \\ f(q_1, 1) &= (q_2, 1, +1) \\ f(q_2, b) &= (q_3, b, -1) \\ f(q_2, 1) &= (q_2, 1, +1) \\ f(q_3, b) &= (q_-, 1, +1) \\ f(q_3, 1) &= (q_+, b, +1) \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.12 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je na traci Turingove mašine dat uređen par brojeva $(n, m) \in \mathbb{N}_0^2$, i to tako što je broj n zapisan kao $n + 1$ jedinica, zatim je zapisana nula, i broj m koji je predstavljen sa $m + 1$ jedinica. U sve ostale ćelije trake Turing-ove mašine je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom 1. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ koji računa

- (a) funkciju projekcije na prvu koordinatu $U_1^2 : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $U_1^2(n, m) = n$;
 (b) funkciju projekcije na drugu koordinatu $U_2^2 : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $U_2^2(n, m) = m$.

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_-, 0, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_1, 0) = (q_2, b, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_2, b) = (q_+, b, -1)$
 $f(q_2, 0) = (q_-, 0, +1)$
 $f(q_2, 1) = (q_2, b, +1)$

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 0) = (q_-, 0, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, b, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_1, 0) = (q_+, b, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_1, b, +1)$

□

Zadatak 1.13 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je broj $n \in \mathbb{N}_0$ zadat kao niz od $n + 1$ jedinica između dva prazna simbola. U sve ostale ćelije je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom zadatog broja. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ koji računa

- (a) $sgn(n)$;
 (b) $\overline{sgn}(n)$.

Rešenje.

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_+, b, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_2, 1, +1)$
 $f(q_2, b) = (q_+, b, +1)$
 $f(q_2, 1) = (q_2, b, +1)$

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
 $f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$
 $f(q_1, b) = (q_+, 1, +1)$
 $f(q_1, 1) = (q_2, b, +1)$

$$f(q_2, b) = (q_+, b, +1)$$

$$f(q_2, 1) = (q_2, b, +1)$$

□

Zadatak 1.14 Turing-ova mašina radi sa azbukom $\{1, b\}$, gde je b prazan simbol. Neka je na traci Turingove mašine dat uređen par brojeva $(n, m) \in \mathbb{N}_0^2$, i to tako što je broj n zapisan kao $n + 1$ jedinica, zatim je zapisana nula, i broj m koji je predstavljen sa $m + 1$ jedinica. U sve ostale ćelije trake Turing-ove mašine je upisan prazan simbol. Neka se glava mašine nalazi nad krajnjim levim znakom 1. Konstruisati program za Turing-ovu mašinu $f : Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{+1, -1\}$ koji računa $n + m$.

Rešenje.

$$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$$

$$f(q_0, 0) = (q_-, 0, +1)$$

$$f(q_0, 1) = (q_1, b, +1)$$

$$f(q_1, b) = (q_2, b, -1)$$

$$f(q_1, 0) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_2, b) = (q_-, b, +1)$$

$$f(q_2, 0) = (q_-, 0, +1)$$

$$f(q_2, 1) = (q_+, b, -1)$$

□